



Сетевые структуры

Николай Скворцов
nsv@mail.ru

План лекции

- ▶ Структурная эквивалентность
 - ▶ Мотивы (структурные образцы)
 - ▶ Двудольные сети
 - ▶ Ассортативные сети
 - ▶ Сети со знаками (положительными и отрицательными связями)
-



Прошлая лекция

- ▶ Фактически тоже рассматривались сетевые структуры
 - ▶ Сообщества как структуры, определяемые плотными подграфами
 - ▶ Клики: полные, k -ядра, n -клики, r -клики, перколяции клик
 - ▶ Иерархические и спектральные методы кластеризации
 - ▶ К ним мы относились как к сообществам

Разделение сети

- ▶ Выделение подграфа
- ▶ Разрез – разделение вершин сети на два непересекающихся подмножества
- ▶ Размер разреза – количество рёбер, пересекаемых разрезом
 - ▶ $\sum_{i \in V_1, j \in V_2} e_{ij}$
- ▶ Алгоритм
 - ▶ Выделяется случайное ребро в графе
 - ▶ Вершины u и v , соединённые ребром, сливаются в вершину (uv)
 - ▶ Повтор, пока в графе не останутся две комплексные вершины
- ▶ Минимальный разрез – минимизация размера разреза
- ▶ Подходы с помощью кластерных алгоритмов

Структурная эквивалентность

- ▶ Вершины структурно эквивалентны, если граф автоморфичен для отображения данных вершин друг на друга
 - ▶ Вершины структурно эквивалентны, если они имеют одних и тех же соседей
 - ▶ Вычисление меры сходства между строками/столбцами матрицы смежности
- ▶ Вершины автоморфично эквивалентны, если существует автоморфичное отображение при фиксированных рассматриваемых вершинах
- ▶ Вершины регулярно эквивалентны, если они связаны с другими регулярно эквивалентными вершинами
 - ▶ Одинаковая структурная роль вершин
 - ▶ Они связаны с одинаковыми типами вершин

Меры сходства вершин

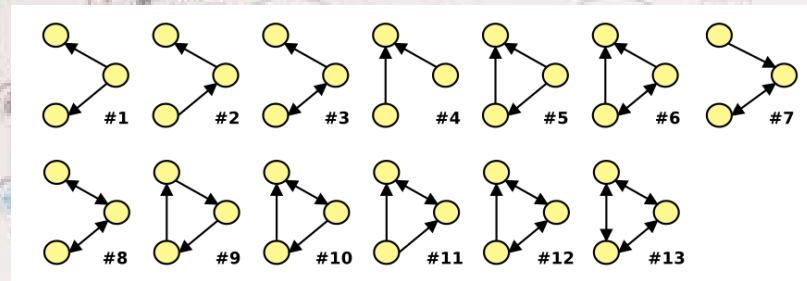
- ▶ Подсчёт количества различающихся вершин
 - ▶ Количество разных значений в строках/столбцах матрицы смежности
- ▶ Векторный подход
 - ▶ Косинус между векторами
- ▶ Мера сходства Жаккара
- ▶ Коэффициент корреляции Пирсона

$$\cos(v_i, v_j) = \frac{\sum_k A_{ik} A_{kj}}{\sqrt{\sum A_{ik} A_{ki}} \sqrt{\sum A_{jk} A_{kj}}} = \frac{n_{ij}}{\sqrt{k_i k_j}}$$

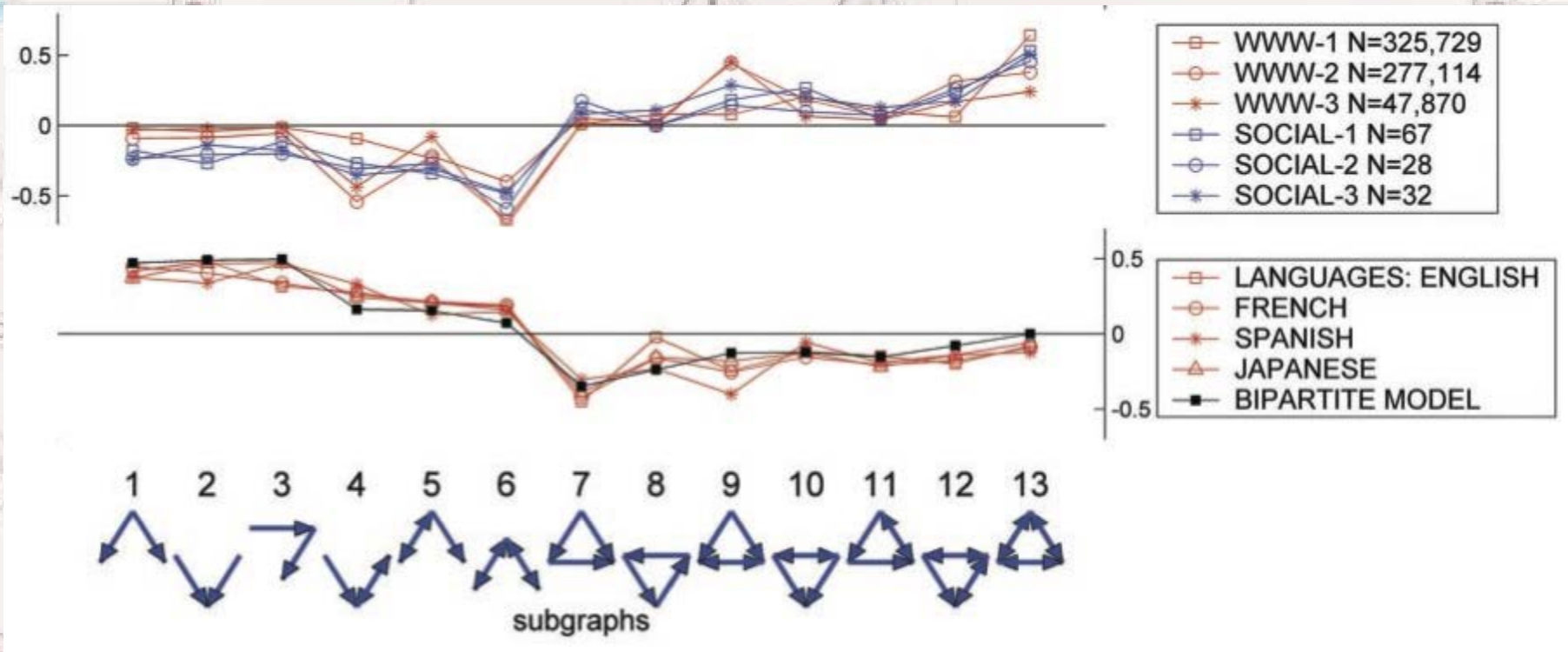
$$J(v_i, v_j) = \frac{|\mathcal{N}(v_i) \cap \mathcal{N}(v_j)|}{|\mathcal{N}(v_i) \cup \mathcal{N}(v_j)|}$$

Мотивы

- ▶ Структуры, присутствующие в сети чаще, чем ожидается статистически
 - ▶ Какие структуры характерны для сети?
- ▶ Алгоритм
 - ▶ Вычисление количества вхождений подграфа
 - ▶ Разница с частотой подграфа в случайной сети
 - ▶ Большая сложность
- ▶ Диады и триады
 - ▶ Тернарные социальные отношения
 - ▶ Взаимные ссылки
 - ▶ Отношение
- ▶ Другие мотивы

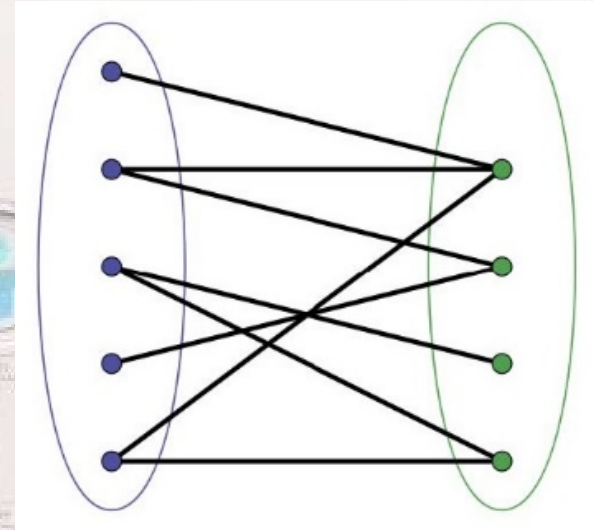


Примеры триад



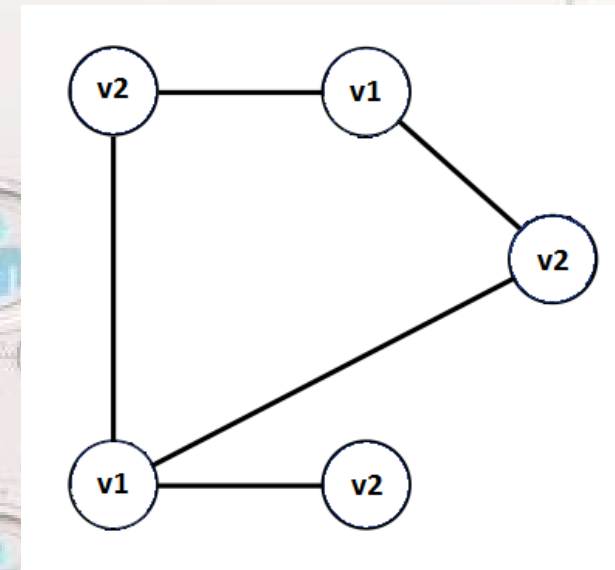
Двудольные (двухмодальные) сети

- ▶ Сети, в которых вершины можно разделить на два множества
- ▶ $G(V_1 \cup V_2, E)$
- ▶ $(v_1, v_2) \in E, v_1 \in V_1, v_2 \in V_2$
- ▶ Примеры сетей
 - ▶ Отношения между агентами из двух групп
 - ▶ Использование агентами общих ресурсов
 - ▶ Партнерские сети
 - ▶ Одновременное участие агентов в наборе групп
 - ▶ Партнёрский сети (affiliation networks)



Образование двудольной сети

- ▶ Раскрасить вершины для образования биполярной сети можно в сети, если в ней нет циклов нечётной длины
- ▶ Алгоритм
 - ▶ Подход: поиск в ширину
 - ▶ Выбранная вершина раскрашивается одним из двух цветов
 - ▶ Рекурсивно для каждой раскрашенной вершины нераскрашенные соседи раскрашиваются в альтернативный данной вершине цвет
- ▶ Спектральный подход
 - ▶ Граф двудольный, если его спектр как множество точек действительной оси симметричен относительно нулевой точки



Матричное представление

- ▶ Матрица смежности

- ▶ $A = \begin{bmatrix} 0 & B \\ B^T & 0 \end{bmatrix}$

- ▶ Матрица инцидентности

- ▶ Несимметричная матрица $B : |V_1| \times |V_2|$

- ▶ Бикластеризация

- ▶ Кластеры с двумя видами вершин

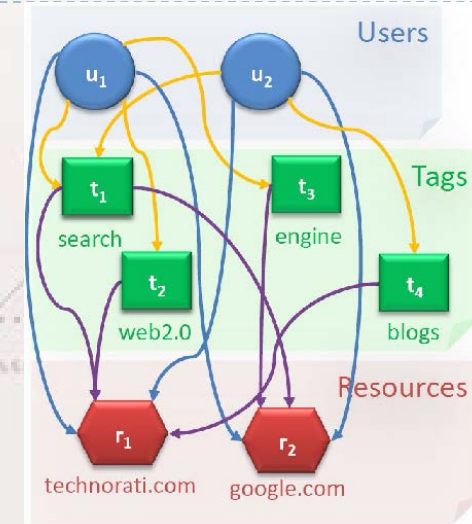
- ▶ Кластер – это, например, достаточно замкнутый рынок

Проекция на однодольную сеть

- ▶ Если важно исследовать только один тип вершин V_1 из двух, сеть может быть сведена к сети только из этих вершин
 - ▶ Сеть только из вершин типа V_1
 - ▶ Рёбра между вершинами, имеющими хотя бы одного общего соседа V_2 в оригинальной двудольной сети
 - ▶ Матрица смежности
 - ▶ $(A + I) = BB^T$ (либо $B^T B$ для V_2)
 - ▶ Для получения матрицы смежности придется убрать петли на каждой вершине
 - ▶ Рёбра могут быть
 - ▶ Взвешены по количеству общих соседей в двудольной сети
 - ▶ Типизированы в соответствии с общими вершинами из V_2 в двудольной сети

Пример: представление фолксономии

- ▶ Трёхдольный гиперграф характеризующий назначение агентами тегов ресурсам
- ▶ Сведение к простому графу
 - ▶ Однодольный граф тегов с двумя типами рёбер
 - ▶ Теги назначены одним и тем же агентом
 - ▶ Теги связаны с одним и тем же ресурсом
- ▶ Вместо матрицы смежности – матрица сходства, если сеть взвешенная
- ▶ Коллаборативная фильтрация
 - ▶ Агенты, назначающие теги одним и тем же ресурсам
 - ▶ Ресурсы, отмечаемые одними и теми же агентами



Ассортативные сети

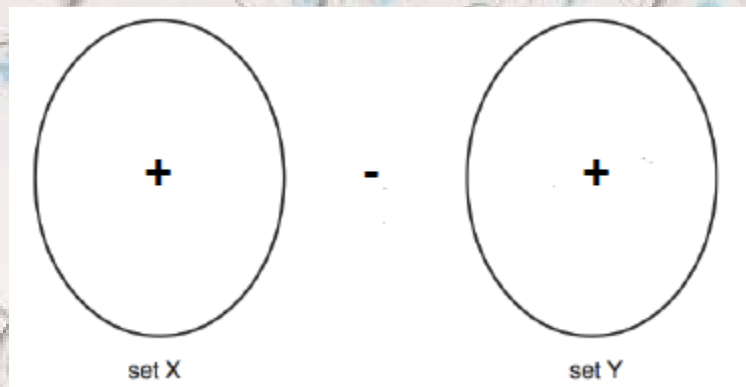
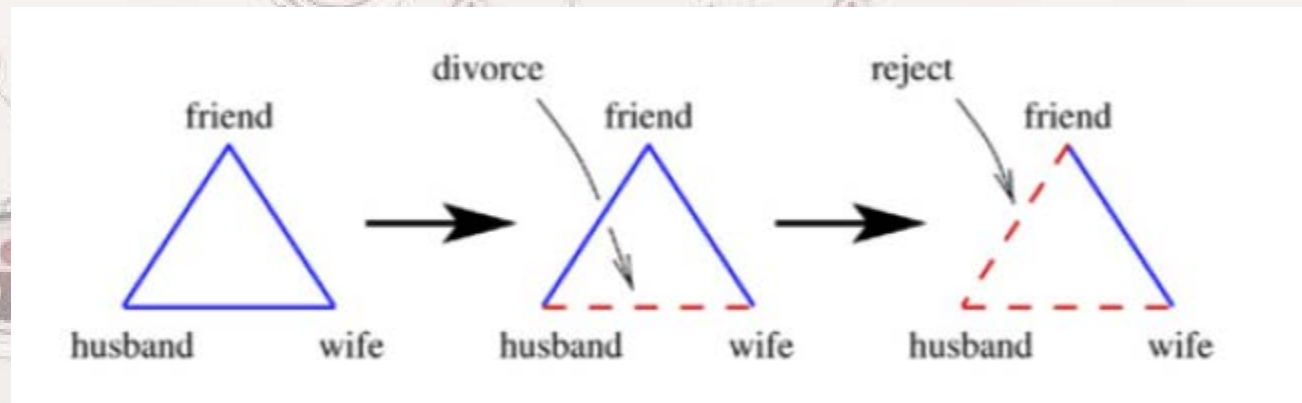
- ▶ Ассортативное смешивание – склонность агентов связываться с агентами, подобными по некоторому признаку
- ▶ Ассортативной сетью является сеть, в которой подобные вершины (одного типа) имеют тенденцию образовывать сообщества
 - ▶ Половое преобладание в сообществе
 - ▶ Социальные отношения
- ▶ Вершины большой степени связываются с вершинами большой степени
 - ▶ Сети с предпочтительным соединением
 - ▶ Исследование средней степени соседей вершины
 - ▶ Сравнение её со степенью самой вершины
- ▶ Дисассортативная сеть - подобные вершины связаны через посредство вершин другого типа
 - ▶ Биологические отношения
 - ▶ Технологические отношения
- ▶ Коэффициент ассортативности

$$r = \frac{cov}{var} = \frac{\sum_{ij} \left(A_{ij} - \frac{k_i k_j}{2m} \right) x_i x_j}{\sum_{ij} \left(k_i \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{2m} \right) x_i x_j}$$

Сети со знаками

- ▶ **Враг моего врага – мой друг**
 - ▶ Сеть с положительными и отрицательными связями
 - ▶ Исследование структур в сети
 - ▶ Некоторые триады стабильны, некоторые имеют тенденцию вырождаться
- ▶ **Отношения**
- ▶ **Структурный баланс**
 - ▶ Граф можно разделить на две группы, которые взаимно антагонистичны
 - ▶ Следовательно, граф можно раскрасить в два цвета (но он пока не двудольный)
 - ▶ Группы с положительными связями можно объединить в супервершины
 - ▶ Наружу будут смотреть отрицательные связи
 - ▶ Тогда он станет двудольным
- ▶ **Примеры сетей**
 - ▶ Социологические исследования
 - ▶ Любовный треугольник
 - ▶ Политические коалиции

Устойчивые и неустойчивые связи



Баланс сил в войнах

