



# Сетевые процессы

Николай Скворцов  
nsv@mail.ru

# План лекции

---

- ▶ Модели динамического роста сетей
  - ▶ Случайный граф
  - ▶ Модель предпочтительного присоединения
- ▶ Модели диффузии и эпидемий
- ▶ Устойчивость сети



# Прошлая лекция

---

- ▶ Рассмотрены сетевые модели с различными характеристиками
  - ▶ Случайный граф
  - ▶ Модель предпочтительного присоединения
- ▶ Различные сетевые модели растут по-разному

# Разновидности сетевых процессов

---

- ▶ Реальные сети растут
  - ▶ Модели динамического роста
  - ▶ Модели цитирования
- ▶ Элиминация вершин или рёбер
- ▶ Процессы в сетях стационарной структуры
  - ▶ Блуждание, потоки
  - ▶ Изменение состояния вершин

# Рост случайной сети (Эрдёш-Реньи)

- ▶  $t$  – тики времени
- ▶ В момент  $t=i$  появляется новая вершина и соединяется с  $m$  случайных рёбер
- ▶ Ожидаемая степень вершины  $i$  в момент  $t$ 
  - ▶  $k_i(t) = m + \frac{m}{i+1} + \dots + \frac{m}{t} = m \left( 1 + \log \frac{t}{i} \right)$
  - ▶ Со временем вероятность приобрести новые связи становится меньше
  - ▶ Старые вершины имеют больше вершин
- ▶ В дифференциальном виде
  - ▶  $k_i(t + \partial t) = k_i(t) + \frac{m}{t} \partial t$
  - ▶  $\frac{\partial k_i(t)}{\partial t} = \frac{m}{t}$

# Рост сети предпочтительного присоединения (Барабаши-Альберта)

- ▶  $t$  – время
- ▶  $n_0$  вершин
- ▶ На каждом шаге добавляется новая вершина и соединяется с  $m$  рёбер
- ▶ Вероятность присоединиться к вершине пропорциональна степени вершины

- ▶ 
$$p(k_i) = \frac{k_i}{\sum k_i}$$

- ▶ Ожидаемая степень вершины

- ▶ 
$$k_i(t + \partial t) = k_i(t) + mp(k_i)\partial t$$

- ▶ 
$$\frac{\partial k_i(t)}{\partial t} = mp(k_i) = m \frac{k_i}{\sum k_i} = \frac{mk_i}{2mt} = \frac{k_i(t)}{2t}$$

- ▶ 
$$k_i(t) = m \sqrt{\frac{t}{i}}$$

# Модель случайного блуждания

- ▶ Переходы на случайные соседние вершину
- ▶ Сети неориентированные
- ▶ В общем случае
  - ▶ Взвешенные вершины
  - ▶ Ориентированные дуги
- ▶ Частота посещения вершины зависит от структуры сети
  - ▶ На этом основан метод обнаружения с
- ▶ Вероятность посещения в момент  $t$ 
  - ▶  $\sum p_i(t)$
- ▶ Блуждание в момент  $t+1$ 
  - ▶ 
$$p_i(t + 1) = \sum \frac{p_i(t)}{k_i} A_{ij}$$

## Модель случайного блуждания (2)

- ▶ Матрица переходов

- ▶  $\frac{A_{ij}}{k_i} = D_{ij}^{-1} A_{ij}$

- ▶  $D_{ij}^{-1}$  - диагональная матрица степеней

- ▶ Возвращаясь к вероятности посещения

- ▶  $p(t+1) = (D^{-1}A)^T p(t)$

- ▶  $p(t) = ((D^{-1}A)^T)^t p(0)$



# Модель проникновения (диффузии)

▶ Вместо блужданий рассматриваются потоки

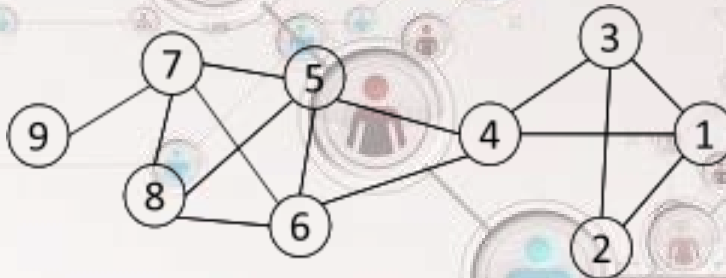
▶ Количество вещества в вершине  $i$

$$n_i(t+1) = n_i(t) + K \sum (n_j(t) - n_i(t)) A_{ij}$$

$$\frac{\partial n_i(t)}{\partial t} = K \sum (A_{ij} n_j(t) - k_i n_i(t))$$

▶ Используем Лапласиан  $L = D - A$

$$\frac{\partial n_i(t)}{\partial t} = -K \sum L_{ij} n_j(t) = -K L n(t)$$



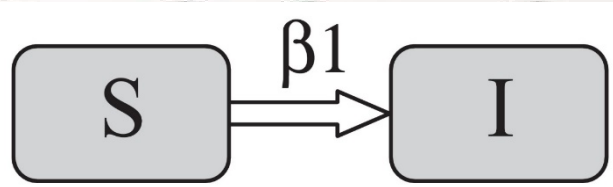
$$\tilde{L} = D - A =$$

3	-1	-1	1	0	0	0	0	0
-1	2	-1	0	0	0	0	0	0
-1	-1	3	-1	0	0	0	0	0
-1	0	-1	4	-1	-1	0	0	0
0	0	0	-1	4	-1	-1	-1	0
0	0	0	-1	-1	4	-1	-1	0
0	0	0	0	-1	-1	4	-1	-1
0	0	0	0	-1	-1	-1	3	0
0	0	0	0	0	0	-1	0	1

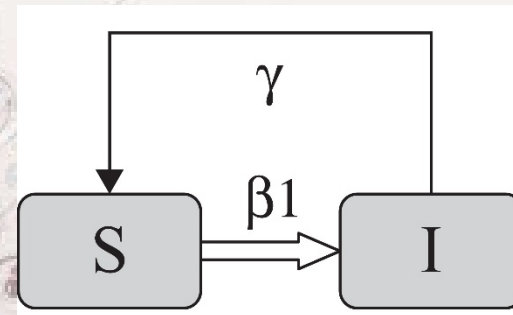
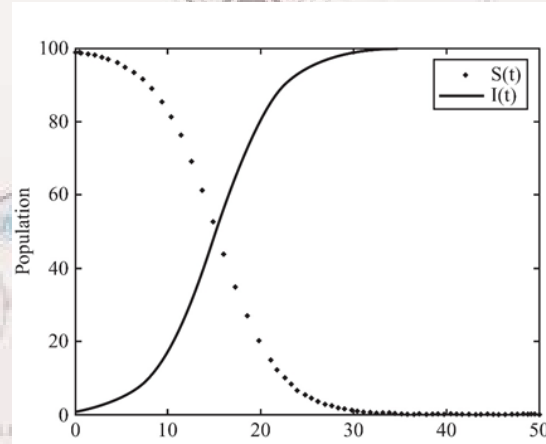
# Модели эпидемий

- ▶ Эпидемии описывают процесс распространения заражения
    - ▶ Патоген
    - ▶ Популяция – сеть контактов
    - ▶ Механизм распространения
  - ▶ Сеть контактов
    - ▶ Вершины – индивиды, рёбра – их взаимодействия.
    - ▶ Исследование включает возможность заражения, восстановления, избежания заражения
  - ▶  $N$  – Количество людей size of the crowd
  - ▶  $S(t)$ : количество восприимчивых индивидов в момент времени  $s(t) = S(t)/N$
  - ▶  $I(t)$ : количество заражённых индивидов в момент времени  $i(t) = I(t)/N$
  - ▶  $R$  – количество выздоровевших в данный момент времени
  - ▶  $\beta$ : Вероятность контакта (если  $\beta = 1$ , каждый контактирует с каждым)
- $$N = S(t) + I(t)$$
- ▶ Модели используются при изучении глобальных структур, таких как тенденции и возможность заражения, а не того, кто кого заражает

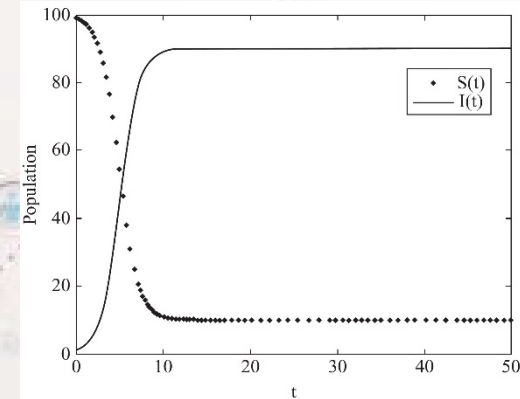
# Различные модели эпидемий



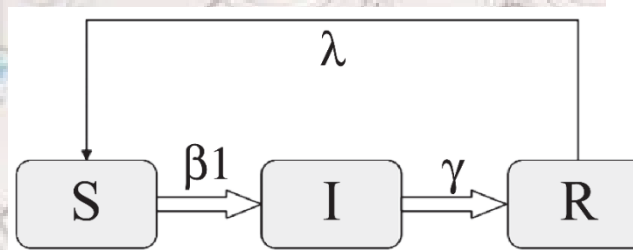
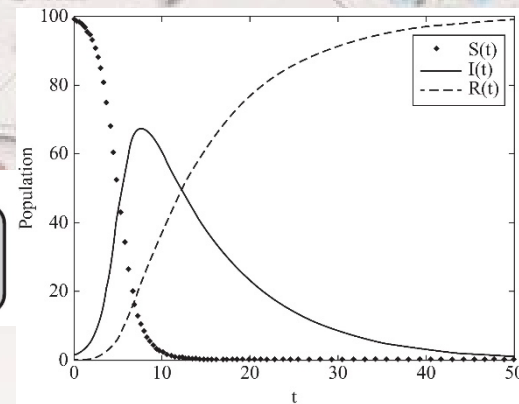
**SI:  $S + I = N$**



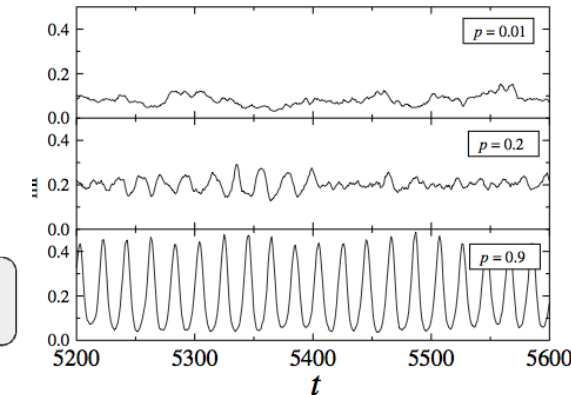
**SIS:  $I + S = N$**



**SIR:  $I + S + R = N$**



**SIRS:  $I + S + R = N$**



# Эпидемии в сети контактов

- ▶ Вероятностная сетевая модель

- ▶  $s_i(t)$  – вероятность, что в момент  $t$  вершина  $i$  здорова
- ▶  $x_i(t)$  – вероятность, что в момент  $t$  вершина  $i$  инфицирована
- ▶  $r_i(t)$  – вероятность, что в момент  $t$  вершина  $i$  выздоровевшая
- ▶  $\beta$  – вероятность заражения в единицу времени

- ▶  $S \rightarrow I$

- ▶  $x_i(t + 1) = x_i(t) + \beta s_i(t) \sum A_{ij} x_j(t)$

- ▶  $\frac{\partial x_i(t)}{\partial t} = \beta s_i(t) \sum A_{ij} x_j(t)$

- ▶  $\frac{\partial x_i(t)}{\partial t} = -\beta(1 - x_i(t)) \sum A_{ij} x_j(t)$

- ▶  $\frac{\partial s_i(t)}{\partial t} = -\beta A x(t)$

- ▶  $x_i(t)$  стремится к 1, заражение происходит быстрее для вершин с большой степенью

# Эпидемии в сети контактов

## ▶ $S \rightarrow I \rightarrow S$

▶  $x_i(t) + s_i(t) = 1$

▶  $\beta$  – вероятность заражения в единицу времени

▶  $\gamma$  – вероятность выздоровления в единицу времени

▶ 
$$\frac{\partial x_i(t)}{\partial t} = \beta s_i(t) \sum A_{ij} x_j(t) - \gamma x_i$$

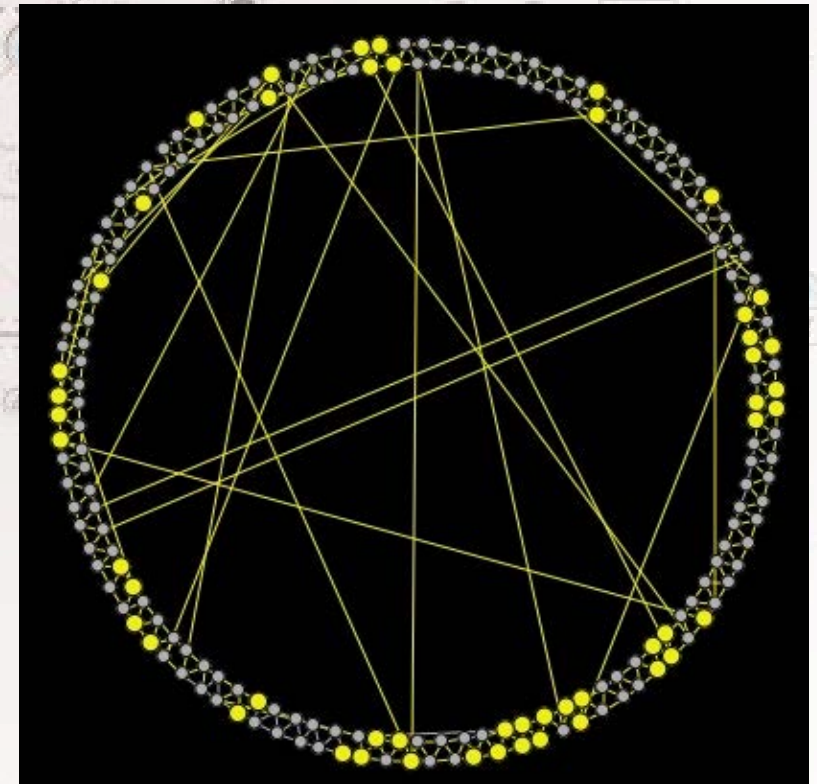
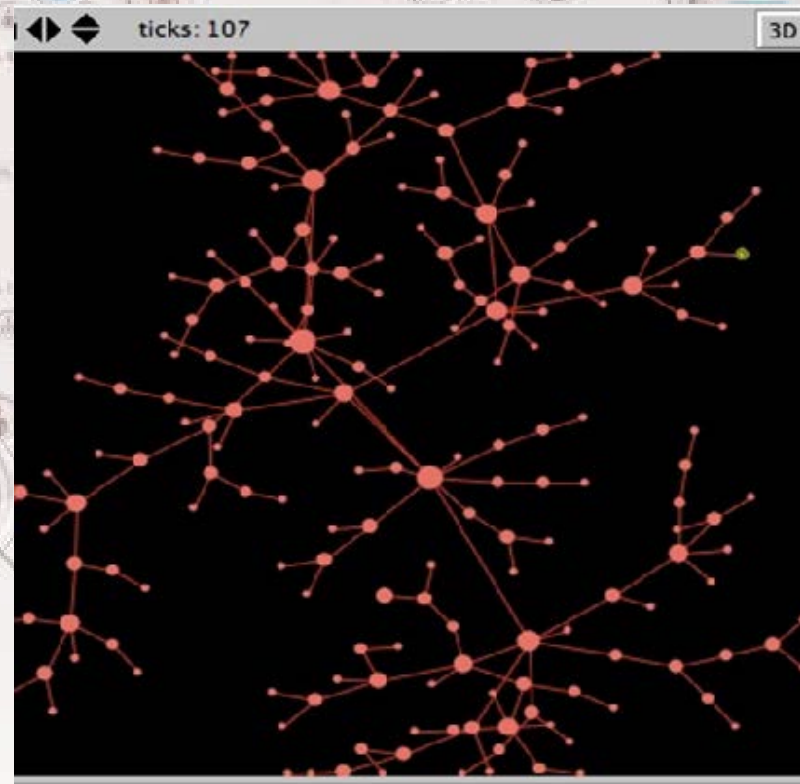
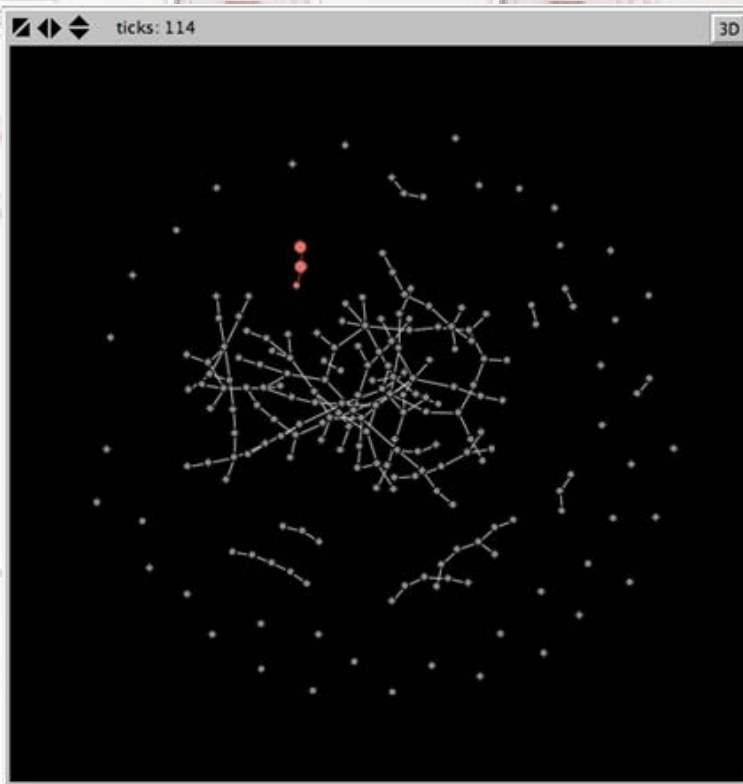
▶ 
$$\frac{\partial s_i(t)}{\partial t} = -\beta s_i(t) \sum A_{ij} x_j(t) + \gamma x_i$$

▶ 
$$\frac{\partial s_i(t)}{\partial t} = \beta M x(t), M = A - \frac{\gamma}{\beta} I$$

▶  $x_i(t)$  в зависимости от  $\beta$  и  $\gamma$  процесс может заглохнуть или экспоненциально расти

# Эпидемии в сетях разной структуры

- ▶ В сети ER проникновение зависит от плотности главного компонента
- ▶ В сети BA проникновение заметно ускоряется при достижении хабов
- ▶ Вероятность прямых связей в SM ускоряет проникновение



# Устойчивость сети

---

- ▶ Элиминация доли вершин или ребер
  - ▶ Как сокращается компонент
  - ▶ Как повлияет на путь между вершинами
  - ▶ Как это зависит от топологии сети
- ▶ Намеренность
  - ▶ Случайный сбой с вероятностью  $(1 - p)$
  - ▶ Направленная атака – минимальная элиминация с максимальным разрушением сети
- ▶ Посредничество вершин и рёбер
  - ▶ Элиминация вершин с максимальной центральностью по посредничеству
  - ▶ Элиминация рёбер – распад сети на сообщества

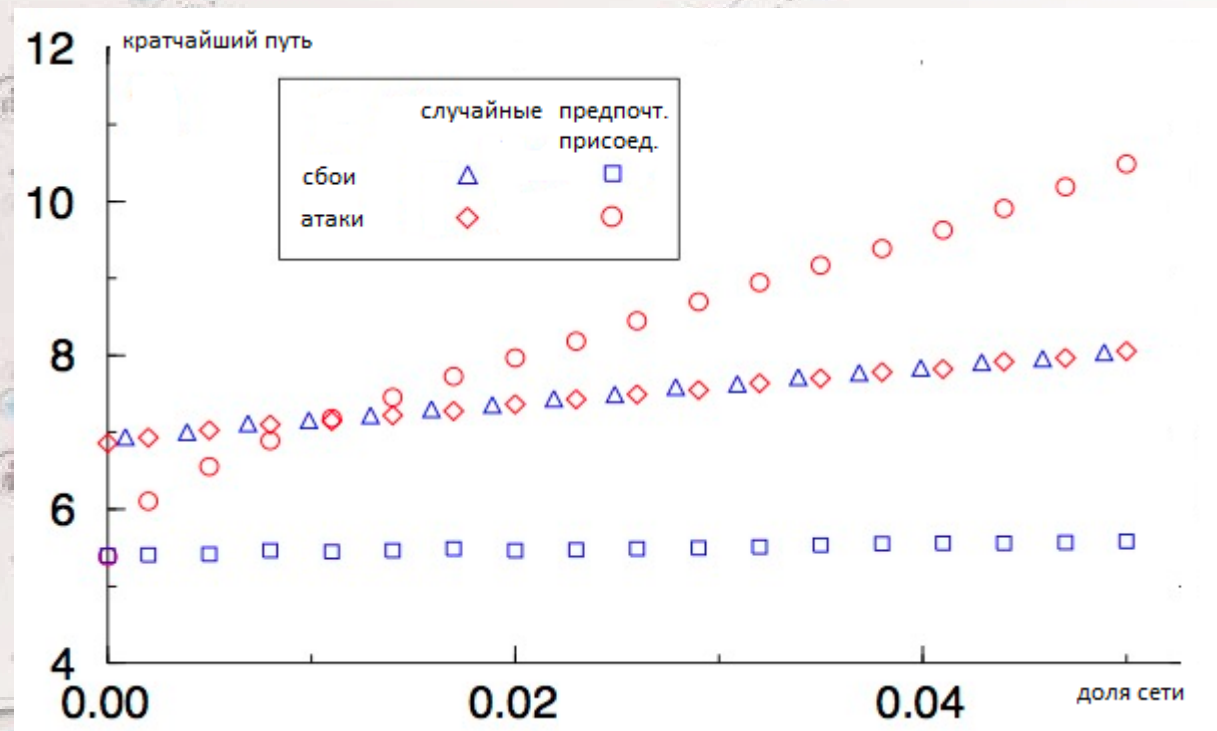
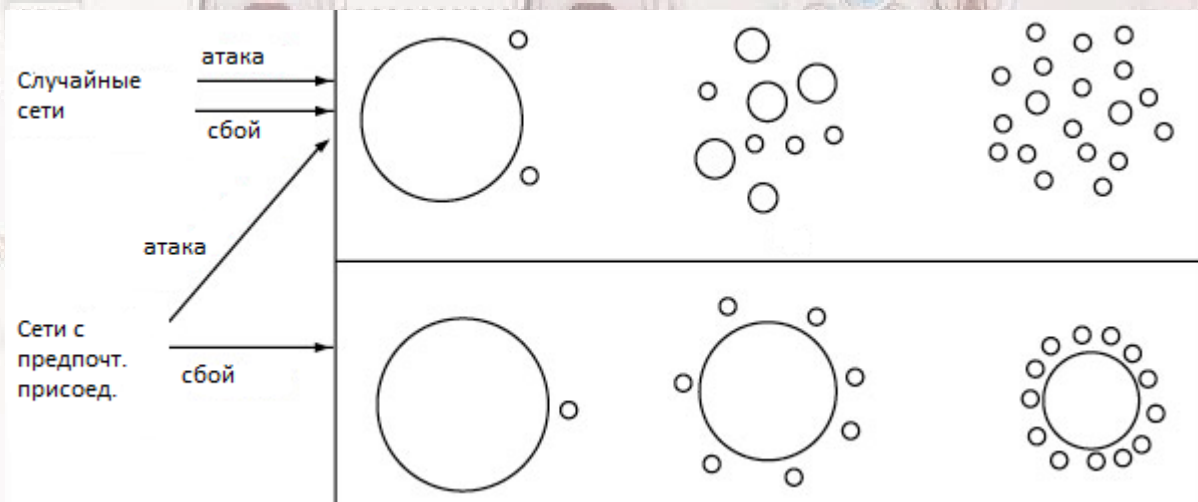


# Устойчивость сетей разной топологии

- ▶ Элиминация рёбер в случайных сетях
  - ▶ Процесс, обратный росту
  - ▶ Порог исчезновения главного компонента
  - ▶ При средней степени вершин  $\lambda_c = 1$
  - ▶ Малые острова при меньшей средней степени
- ▶ Элиминация вершин в сетях с предпочтительным присоединением
  - ▶ Много вершин малой степени
  - ▶ Устойчивы к случайному удалению вершин
  - ▶ Удаление хабов (вершин с высокой центральностью по посредничеству)
    - ▶ При этом удаляется также много рёбер



# Устойчивость компонентов и кратчайший путь



# Устойчивость реальных соцсетей

- ▶ В реальных онлайн-соцсетях
  - ▶ Есть ассортативность по степеням вершин
    - ▶ Соединение звёзд со звёздами
  - ▶ Ассортативность по другим критериям:
    - ▶ Национальность, пол, возраст, доход
  - ▶ Присутствует также доля дисассортативности по степеням
    - ▶ Связи между неизвестными и популярными
- ▶ Дисассортативные сети по степеням имеют крупные хабы (неустойчивы к атакам)
- ▶ Ассортативные по степеням имеют длинные пути среди вершин с малой степенью и плотные сообщества (устойчивые сети)
- ▶ Сочетание роста и элиминации
  - ▶ Потери быстро замещаются
  - ▶ Связи перестраиваются
  - ▶ Например, криминальные сети

# Каскадное распространение сбоя

---

- ▶ Например, в энергетике
  - ▶ Экспоненциальные сети
  - ▶ Отключение хаба распространяется на всю распределительную сеть
  - ▶ Альтернативные пути распределения
  - ▶ Пропускная способность вершин и рёбер